力学

注意！！

物理を学ぶにあたって注意してほしいこと，守ってほしいことを書いておきます.

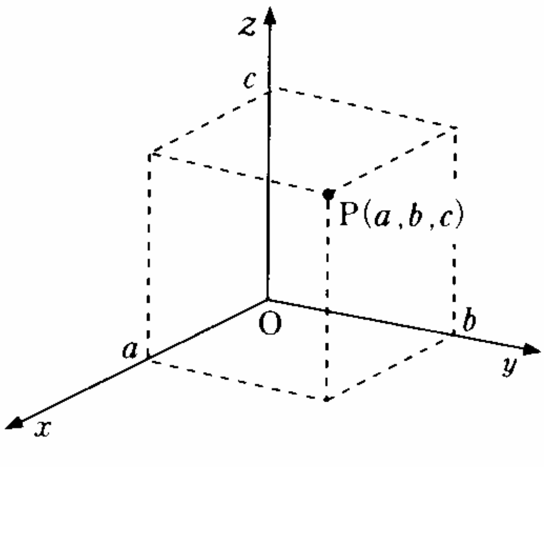
1. 何が**定義**で何が**原理**なのか，何がそれらから導かれる**法則**なのかをはっきり認識すること.
2. 単位に注意しましょう.
3. 図は大きくはっきりと書きましょう.
4. 自分で考えて，自分でガリガリ計算しましょう.

定義：世界共通のルール，サッカーで手を使っちゃだめよってのと同じ.
原理：証明不可能な自然のルール．偉人たちによって発見された経験則.
法則：定義や、原理から導かれた有意義な法則.

運動の記述の仕方

力学は物体の運動を観測することによって，あらゆる時刻に関して位置や速度を予測することを目的とする.
そこである空間上に原点を定め, その原点から伸ばした位置ベクトル$\vec{r}$ によって対象とする物体の位置を示すことにする.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$



また、速度，加速度を次のように**定義**する.

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix},$$

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

注意！！

速度（velocity）とはベクトル量であり，速さ（speed：スカラー量）とは違う．日本語としてはちょっぴりの違いだが，気をつけて使わなければならない．

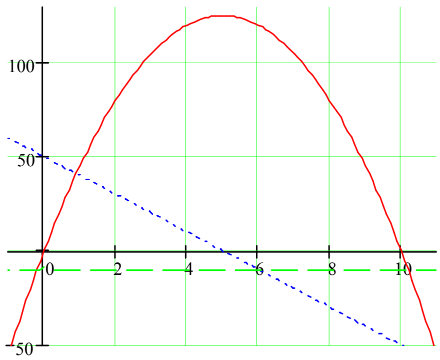
ちなみに速さは次のようになる．

$$v \equiv |\vec{v}| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}$$

そこで微分が積分の逆演算であることを思い出すと，加速度から速度を求め，さらに位置ベクトルまでも求められることがわかるだろう．

今、加速度がわかったとする．

そのとき速度は（まず x 成分だけを考える）



$$v_x(t) - v(0) = \int_{t=0}^{t=t} a_x dt = a_x t$$

$$\Leftrightarrow v_x(t) = v(0) + a_x t$$

となり，位置は

$$x(t) - x(0) = \int_{t=0}^{t=t} v_x dt = \int_{t=0}^{t=t} [v(0) + a_x t] dt = v(0)t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$\Leftrightarrow x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

となることが，簡単に理解できる． y 成分， z 成分も同様である．

力学の出発点・原理（ニュートンの3 法則）

運動の第 2 法則

力・慣性質量・加速度の関係を表す経験則であり，運動の法則とも呼ばれる．ニュートンによって発見された．実際にはガリレオが既に発見しているが，どういうわけかニュートンが発見したとされている．

慣性系において，質量 m の質点に力 $\vec{F}$ が働いているとき，質点の位置 $\vec{r}$ は運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

に従って変化する．

また，この式は単なる等式ではない．左辺は加速度，右辺は力といった，全く違う量である．これが原理たるゆえんである．この式は物体に力（**原因**）を加えたら，加速度が変化した（**結果**）という**因果法則**を示す．物理学は，物事が変化するときには，必ず原因が存在するといった思想に基づいて作られていることの具体例である．

運動の第１法則

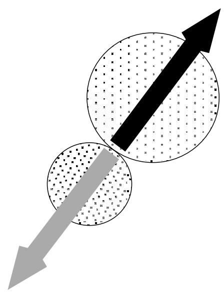
慣性系における力を受けていない質点の運動を記述する経験則であり，慣性の法則とも呼ばれる．ガリレイやデカルトによってほぼ同じ形で提唱されていたものをニュートンが基本法則として整理した．静止している質点は，力を加えられない限り静止を続ける．運動している質点は，力を加えられない限り等速直線運動を続ける．慣性の法則は、どのような座標系でも成立するわけではない．例えば加速中の電車内に固定された座標系では、力を受けていない空き缶がひとりでに動きだすことがある．慣性の法則が成立するような座標系を慣性系という．

運動の第３法則

力が相互作用によって生じるものであり，一方が受ける力と他方が受ける力は向きが反対で大きさが等しいこと表す経験則であり，作用・反作用の法則とも呼ばれる．2個の質点ＡとＢがあり，互いに力を及ぼしあっているとき、質点Ａが質点Ｂから受ける力は、質点Ｂが質点Ａから受ける力と，大きさが等しく向きが反対である．すなわち，

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

が成り立つ．



運動方程式を書く

1　座標の方向と原点を設定する．
2　まず運動を調べたい物体とそれに接する物体の絵を描く．
3　重力や電磁気力など、遠隔力を矢印と大きさで示す．
4　接する物体から受ける力を矢印と大きさで示す．
5　各成分（ｘ成分，ｙ成分，ｚ成分）ごとに力を分解する．
6　各成分ごとに加速度を設定し，右辺に力を書いていく．
7　完成！

運動方程式を解く

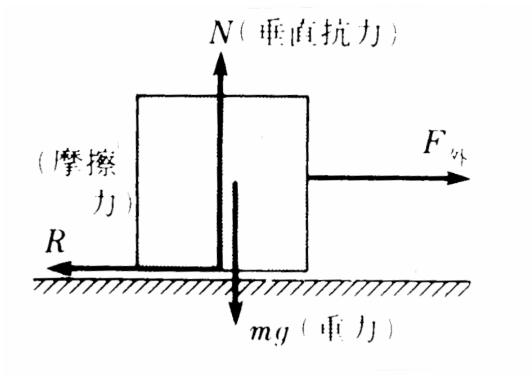
運動方程式は求めたい位置ベクトル$\vec{r}$の２階微分である加速度が含まれている．このような式を一般に微分方程式という．つまり運動方程式を解くとは，微分方程式を解くことである．
さて、微分方程式を解くにはどうすればいいのだろうか．一般に両辺を適当に変形し（積分定数を消すために初期条件を加えながら）積分すればよい．また，右辺の力$\vec{F}$の形によってさまざまな解き方がテクニックが存在する．しかし勘違いしてほしくないのは，運動方程式をたてるまでが物理であり，それを解くことは単なる数学である．しかし自力で問題を解くためには，自分で手を動かすことが必要なため，ぜひ自分で考えながら自力で解いてみてほしい．そのうちに解き方を覚えてしまうだろう．そしてひとつを覚えてしまうといろいろなことに応用できる．なぜなら，自然界に見られ現象の多くは似

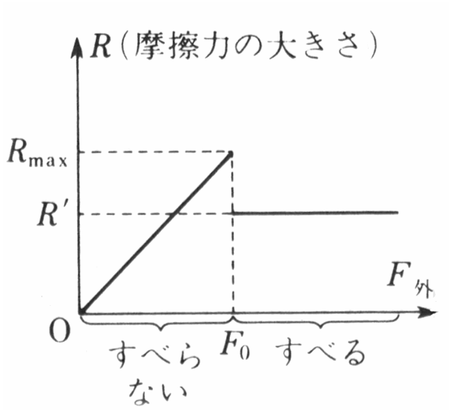
通った形をしているからである．

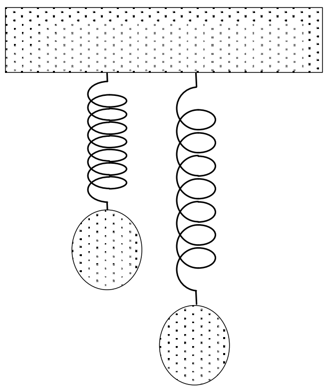
様々な力

垂直抗力と摩擦力；２つの物体が接しているとき反作用として抗力が働く．この抗力を地面に垂直な成分と平行な成分に分けて垂直抗力と摩擦力と呼んでいる．摩擦力は静止摩擦力と動摩擦力に分かれる．最大静止摩擦力は $f_{静止} = \mu_{静止} N$，動摩擦力は $f_{動} = \mu_{動} N$ の形になる． $\mu_{静止}$ は静止摩擦係数， $\mu_{動}$ は動摩擦係数といわれる．

バネの力；バネを伸ばすと，伸ばした方向と逆の方向に，伸びに比例した力が働く．これをフックの法則という．







運動方程式の積分

運動方程式を時刻 t , または変位 $\vec{r}$ によって積分することにより運動量とエネルギーという保存量が見出される.

t で積分（運動量保存則）

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

両辺 t で積分する.

$$\int_{t=t_0}^{t=t} m\frac{d\vec{v}}{dt}dt = \int_{t=t_0}^{t=t} \vec{F}dt$$

$$\int_{v=v_0}^{v=v} md\vec{v} = \int_{t=t_0}^{t=t} \vec{F}dt$$

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{t=t_0}^{t=t} \vec{F}dt \quad (\quad = \vec{F}(t-t_0) \quad)$$

と、いう式が導かれた. このとき左辺にの $m\vec{v}$ を運動量と**定義**する. 一方, 右辺の $\int_{t=t_0}^{t=t} \vec{F}dt$ を力積と**定義**する. またこの式は運動方程式から導かれた式であるから物理的意味（因果関係）を持つと考える. つまり, 力積（原因）を加えられたため, 物体の力積が変化した（結果）と考えるのである.

ここで具体例として２物体の衝突を考えてみよう. 物体の質量で物体の名前をあらわすとした. それぞれの質量をｍとＭとする. それぞれ, 衝突の直前と直後で $\vec{v}_{前}$ と $\vec{V}_{前}$, $\vec{v}_{後}$ と $\vec{V}_{後}$ であった. このとき, それぞれについて力積と運動量の関係について書き下すと, 作用反作用の法則を考慮して,

$$m\vec{v}_{後} - m\vec{v}_{前} = \int_{t=t_0}^{t=t} \vec{F}dt$$

$$M\vec{V}_{後} - M\vec{V}_{前} = -\int_{t=t_0}^{t=t} \vec{F}dt$$

となる. ここで両辺を足し合わせてやれば,

$$m\vec{v}_{後} - m\vec{v}_{前} + M\vec{V}_{後} - M\vec{V}_{前} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m\vec{v}_{後} + M\vec{V}_{後} = m\vec{v}_{前} + M\vec{V}_{前}$$

となり，運動量が時刻によらず一定であることがわかる．これを運動量保存則（**法則**）という．（一般に外力の働かない系の中で運動量は保存する.）

$\vec{r}$ で積分（力学的エネルギー保存則）

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

両辺 $\vec{r}$ で積分する

$$\int_{\vec{r}=t_0}^{\vec{r}=\vec{r}} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}=\vec{r}_0}^{\vec{r}=\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\vec{v}=\vec{v}_0}^{\vec{v}=\vec{v}} md\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \int_{\vec{r}=\vec{r}_0}^{\vec{r}=\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\vec{v}=\vec{v}_0}^{\vec{v}=\vec{v}} md\vec{v}\cdot\vec{v} = \int_{\vec{r}=\vec{r}_0}^{\vec{r}=\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{\vec{v}=\vec{v}_0}^{\vec{v}=\vec{v}} m\begin{pmatrix} dv_x \\ dv_y \\ dv_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \int_{\vec{r}=\vec{r}_0}^{\vec{r}=\vec{r}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$(\frac{m}{2}v_x{}^2 - \frac{m}{2}v_{x0}{}^2) + (\frac{m}{2}v_y{}^2 - \frac{m}{2}v_{y0}{}^2) + (\frac{m}{2}v_z{}^2 - \frac{m}{2}v_{z0}{}^2) = \int_{\vec{r}=\vec{r}_0}^{\vec{r}=\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

$$\frac{m}{2}v^2 - \frac{m}{2}v_0{}^2 = \int_{\vec{r}=\vec{r}_0}^{\vec{r}=\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \left(= \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz \right)$$

という式が導かれた．このとき左辺の $\frac{m}{2}v^2$ を運動エネルギー，右辺の $\int_{\vec{r}=\vec{r}_0}^{\vec{r}=\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ を仕事と**定義**する．またこの式も物理的意味を持つと考える．

仕事（**原因**）を加えられたため，物体の運動エネルギーが変化した（**結果**）と考えるのである．

また，物体に加えられる仕事が経路によらないとき，力 $\vec{F}$ は保存力と呼ばれる．さらに $-\int_{\vec{r}=\vec{r}_0}^{\vec{r}=\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ を位置（ポテンシャル）エネルギーと**定義**すれば，運動エネルギーと位置エネルギーの和が位置に寄らず一定であるということがわかる．運動エネルギーと位置エネルギーの和を力学的エネルギーといい，これを力学的エネルギー保存則（**法則**）という．

具体例として地球表面付近の物体の運動を考えてみよう．地表近くでは重力は質量に

比例し，その比例定数をｇとかく．

よって$\vec{F}=\begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}$となる．これは保存力である．よってエネルギー保存則の式は

$$\frac{m}{2}v^2-\frac{m}{2}{v_0}^2=-(mgy-mgy_0)$$
$$\Leftrightarrow\frac{m}{2}v^2+mgy=\frac{m}{2}{v_0}^2+mgy_0$$

となる．